Cours — SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Systèmes linéaires échelonnés

Définition générale

Remarque

Pour rappel, $\mathbb{K}$ désigne soit l'ensemble $\mathbb{R}$, soit l'ensemble $\mathbb{C}$.

Système linéaire

On appelle **système linéaire** à n équations et p inconnues $(n, p \in \mathbb{N}^*)$ tout système d'équation de la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1, & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2, & L_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n, & L_n \end{cases} \tag{1}$$

- $\forall i \in [\![1;n]\!]$ et $\forall j \in [\![1;p]\!]$, tous les a_{ij}, b_i sont appelés **coefficients** du système.
- $L_1, L_2, \ldots, L_n$ représente les **lignes** du système.
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont les **inconnues** du système. Généralement à gauche du système appelé **premier membre**.
- Le n-uplet $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ s'appelle **le second membre**.

Exemple

On considère les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & L_1 \\ 4x - y = 5 & L_2 \end{cases} \tag{2}$$

Le système suivant est linéaire car :

- Pas de variables multipliées entre elles $xy, x^2, \ldots$
- Coefficients constants
- Chaque équation représente l'équation d'une droite dans un plan $2D$.

Le système suivant n'est pas linéaire à cause de x^2 pour la première équation, et à cause de la fonction $\sin$ dans la seconde équation.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = 7 & L_1 \\ 4x - \sin(y) = 5 & L_2 \end{cases} \tag{3}$$

Ainsi lorsque l'on **cherche les solutions d'un système linéaire** à p inconnues, notre objectif est de **déterminer un p-uplet de $\mathbb{K}^p$ qui vérifie les n équations du système**.

Solution

On appelle **solution** d'un système à n équations et p inconnues de la forme (1), tout p-uplet $(s_1, s_2, \ldots, s_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant toutes les équations du système.

Propriété

Solutions d'un système linéaire

Un système linéaire peut admettre :

- ➢ Aucune solutions
- ➢ Une unique solution
- ➢ Une infinité de solutions

Exemple

On considère les trois systèmes suivants :

1. Système avec une seule solution (compatible déterminé) :

$$\begin{cases} x + y = 4 & (L_1) \\ 2x - y = 1 & (L_2) \end{cases} \tag{4}$$

Résolution :
On peut additionner $L_1 + L_2$:

$$(x + y) + (2x - y) = 4 + 1 \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \tfrac{5}{3}$$

On remplace dans L_1 :

$$\tfrac{5}{3} + y = 4 \Rightarrow y = 4 - \tfrac{5}{3} = \tfrac{7}{3}$$

Conclusion : une seule solution : $(x = \frac{5}{3},\ y = \frac{7}{3})$

2. Système sans solution (incompatible) :

$$\begin{cases} x + y = 2 & (L_1) \\ x + y = 5 & (L_2) \end{cases} \tag{5}$$

Raisonnement :
Si $x + y = 2$, alors nécessairement $x + y \neq 5$.
On soustrait $L_1 - L_2$:

$$(x + y) - (x + y) = 2 - 5 \Rightarrow 0 = -3$$

Cette égalité est fausse : CONTRADICTION.
Conclusion : le système est impossible $\rightarrow$ aucune solution.

3. Système avec une infinité de solutions (compatible indéterminé) :

$$\begin{cases} 2x + 4y = 8 & (L_1) \\ x + 2y = 4 & (L_2) \end{cases} \tag{6}$$

Raisonnement :
On multiplie L_2 par 2 :

$$2(x + 2y) = 2 \times 4 \Rightarrow 2x + 4y = 8$$

On retrouve exactement L_1.
Donc les deux équations sont **équivalentes**.
Le système revient à une seule équation :

$$x + 2y = 4$$

On peut choisir une variable libre.
Par exemple :

$$y = t \Rightarrow x = 4 - 2t$$

Conclusion : une infinité de solutions, de la forme :

$$(x, y) = (4 - 2t,\ t),\ \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

Remarque

Si le second membre d'un système linéaire n'est composé que de 0, on parle de **système homogène**.

$$\text{Système homogène} \iff b = 0_{\mathbb{K}^n}$$

Systèmes échelonnés

Système échelonné

- On dit d'un système linéaire qu'il est **échelonné** lorsque le nombre de coefficients nuls croît strictement à chaque ligne.
- On appelle **inconnue principale** la première inconnue d'une équation ayant un coefficient non nul.
- Les autres sont dites **secondaires**.

Exemple

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4 & (L_1) \\ y + 3z = -2 & (L_2) \\ z = 5 & (L_3) \end{cases} \tag{7}$$

Système échelonné car :

- L_1 commence par x
- L_2 ne contient pas x, commence par y
- L_3 ne contient ni x ni y, commence par z

Ce système est prêt à être résolu par **le principe de remontée** :

$$\begin{cases} z = 5 \\ y = -2 - 3z = -2 - 15 = -17 \\ x = 4 - 2y + z = 4 - 2(-17) + 5 = 4 + 34 + 5 = 43 \end{cases}$$

Solution finale : $x = 43,\ y = -17,\ z = 5$

Méthode

Résolution d'un système linéaire : Le principe de remontée

1. Résoudre la dernière équation.
2. Résoudre successivement les équations précédentes en injectant les valeurs déterminées précédemment.
3. Conclure avec les solutions du système : $S = \{\dots\}$.

Exemple

Système échelonné à 4 équations avec une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 3 & (L_1) \\ y + 2z - t = 1 & (L_2) \\ z + t = 2 & (L_3) \\ 0 = 0 & (L_4) \end{cases} \tag{8}$$

Justification :

- L_1 commence par x
- L_2 ne contient pas x, commence par y
- L_3 ne contient ni x ni y, commence par z
- L_4 est une équation nulle : $0 = 0 \rightarrow$ compatible, mais ne donne pas d'information supplémentaire

Exemple

Ce système est échelonné. Comme la dernière équation est une égalité toujours vraie, il y a une **infinité de solutions**.
Résolution par le principe de remontée :

$$\begin{cases} z+t=2 \Rightarrow z=2-t \\ y+2z-t=1 \Rightarrow y+2(2-t)-t=1 \Rightarrow y+4-2t-t=1 \Rightarrow y=1-4+3t=-3+3t \\ x+y+z+t=3 \Rightarrow x+(-3+3t)+(2-t)+t=3 \\ \quad \Rightarrow x-3+3t+2-t+t=3 \Rightarrow x+(-1)+3t=3 \Rightarrow x=4-3t \end{cases}$$

Conclusion : le système admet une infinité de solutions dépendant du paramètre libre $t \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(x,\ y,\ z,\ t) = (4-3t,\ -3+3t,\ 2-t,\ t)}$$

Propriété

Solutions d'un système échelonné

Un système linéaire échelonné admet :

- ➢ Une unique solution, *lorsque toutes les inconnues sont principales*.
- ➢ Une infinité de solutions, *lorsqu'il y a des inconnues secondaires*.

2 La méthode de Gauss

Méthode de Gauss

La **méthode de Gauss** (ou **élimination de Gauss**) est un algorithme permettant de transformer tout système linéaire en un système échelonné équivalent par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes.

Propriété

Opérations élémentaires sur les lignes

Les trois opérations suivantes ne changent pas l'ensemble des solutions d'un système :

- ➢ **Échange de lignes** : $L_i \leftrightarrow L_j$
- ➢ **Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$
- ➢ **Combinaison linéaire de lignes** : $L_i \leftarrow L_i + \mu L_j$ avec $\mu \in \mathbb{K}$

Méthode 1

Algorithme de la méthode de Gauss

1. **Étape 1** : Choisir un **pivot** non nul dans la première colonne (échanger les lignes si nécessaire).
2. **Étape 2** : Éliminer tous les coefficients sous le pivot en utilisant des combinaisons linéaires.
3. **Étape 3** : Répéter le processus sur le sous-système obtenu en ignorant la première ligne et la première colonne.
4. **Étape 4** : Continuer jusqu'à obtenir un système échelonné.
5. **Étape 5** : Résoudre par remontée.

Exemple

Système 3×3 avec solution unique
Résolvons le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 & (L_1) \\ -3x - y + 2z = -11 & (L_2) \\ -2x + y + 2z = -3 & (L_3) \end{cases} \tag{9}$$

» Étape 1 : Élimination de x dans L_2 et L_3
Pivot : $a_{11} = 2$
Élimination dans L_2 : $L_2 \leftarrow L_2 + \frac{3}{2}L_1$

$$\begin{aligned} &L_2 : -3x - y + 2z + \frac{3}{2}(2x + y - z) = -11 + \frac{3}{2} \times 8 \\ &L_2 : -3x - y + 2z + 3x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = -11 + 12 \\ &L_2 : \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \Rightarrow y + z = 2 \end{aligned}$$

Élimination dans L_3 : $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

$$\begin{aligned} &L_3 : -2x + y + 2z + (2x + y - z) = -3 + 8 \\ &L_3 : 2y + z = 5 \end{aligned}$$

Système après étape 1 :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L_2') \\ 2y + z = 5 & (L_3') \end{cases} \tag{10}$$

» Étape 2 : Élimination de y dans L_3'
Pivot : coefficient de y dans L_2' = 1

$L_3' \leftarrow L_3' - 2L_2'$

$$\begin{aligned} &L_3' : 2y + z - 2(y + z) = 5 - 4 \\ &L_3' : 2y + z - 2y - 2z = 1 \\ &L_3' : -z = 1 \Rightarrow z = -1 \end{aligned}$$

Système échelonné final :

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 & (L_1) \\ y + z = 2 & (L_2') \\ z = -1 & (L_3'') \end{cases} \tag{11}$$

» Étape 3 : Résolution par remontée

$$\begin{aligned} &z = -1 \\ &y = 2 - z = 2 + 1 = 3 \\ &2x = 8 - y + z = 8 - 3 - 1 = 4 \Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

Solution unique : $\boxed{(x, y, z) = (2, 3, -1)}$
Vérification :

- $L_1 : 2(2) + 3 - (-1) = 4 + 3 + 1 = 8$
- $L_2 : -3(2) - 3 + 2(-1) = -6 - 3 - 2 = -11$
- $L_3 : -2(2) + 3 + 2(-1) = -4 + 3 - 2 = -3$

Récapitulatif : Nature des solutions

Pour un système linéaire à n équations et p inconnues, après échelonnement :

- **Système incompatible** : $S = \emptyset$
  $\Rightarrow$ Une ligne de la forme $0 = c$ avec $c \neq 0$
- **Solution unique** : $|S| = 1$
  $\Rightarrow$ Toutes les inconnues sont principales (pas de variables libres)
- **Infinité de solutions** : $|S| = \infty$
  $\Rightarrow$ Présence de variables libres (inconnues secondaires)